Extremale Graphentheorie – Übungsblatt 5
Wintersemester 2019/20
Dr. Christian Reiher, Bjarne Schülke

23. Es sei F ein Graph mit $\chi(F) \geqslant 2$. Man beweise, dass eine reelle Zahl $\alpha < 2$ und eine natürliche Zahl n_0 mit
$$\mathrm{ex}(n, F) \leqslant \frac{r-2}{2(r-1)} \cdot n^2 + n^\alpha$$
für alle $n \geqslant n_0$ gibt.

24. Es seien k eine natürliche Zahl und $\varepsilon \in (0, 1)$. Weiterhin seien H ein Graph und $V(H) = X \mathbin{\dot\cup} Y$ eine Eckenpartition von H. Folgendes sei der Fall:

    (a) Jede Ecke $x \in X$ hat höchstens k Nachbarn in Y.

    (b) Für jede $y \in Y$ gilt $d_X(y) > \varepsilon d_Y(y) + (1 - \varepsilon)(k - 1)$.

    (c) Für jede Ecke $x \in X$ induziert $N(x) \cap Y$ eine Clique in H.

    Man beweise, dass es in H ein Matching zwischen X und Y gibt, das alle Ecken von Y überdeckt.

25. Man benutze das Resultat der vorigen Aufgabe für einen steuerfreien Beweis von Lemma 5.3 aus der Vorlesung

26. Man bestimme alle Gleichheitsfälle von Lemma 5.3 aus der Vorlesung, d.h. alle Situationen, in denen $p|A| = t|B|$ gilt.

27. Es seien $r \geqslant 2$ eine natürliche Zahl und m eine nichtnegative ganze Zahl. Weiterhin sei G ein Graph mit $n \geqslant mr$ Ecken und
$$\delta(G) \geqslant \frac{(r-2)n + m}{r-1} .$$
Man beweise, dass $mK_r \subseteq G$.

28. Man beweise die folgende Verschärfung des Falles $r = 2$ der vorigen Aufgabe. Es seien m eine nichtnegative ganze Zahl und G ein Graph mit mindestens $2m$ Ecken. Weiterhin sei $X \subseteq V(G)$ eine Menge mit $|X| = m$ und der folgenden Eigenschaft. Für alle $x \in X$ ist $d(x) \geqslant m-1$ und für alle $x \in V(G) \smallsetminus X$ ist $d(x) \geqslant m$. Dann gibt es in G ein aus m Kanten bestehendes Matching.

- Abgabe von Aufgabe 24 (schriftlich, keine Gruppenarbeit) am Donnerstag den 19. Dezember vor der Vorlesung
- Eintragung zu den Aufgabe 23, 25–28 bis Freitag den 20. Dezember, 12:00 Uhr unter https://is.gd/7arJ0y
- Diskussion am Freitag, den 20. Dezember, 12:15 Uhr, Geom 432

Hinweise

23. Hier helfen Ideen aus dem Beweis von Lemma 4.1. Was passiert, wenn zu viele Kanten in den A_i sind?

24. Die Ecken aus Y, die mindestens k Nachbarn in X haben, kann man mit dem Heiratssatz bearbeiten.

25. Man ersetze die Ecken aus A und B durch geeignete unabhängige Mengen beziehungsweise Cliquen. Welche Mächtigkeitsabschätzung folgt aus der Existenz eines Matchings?

26. Wann gilt überall im Beweis Gleichheit?

27. Hier kann man den Satz von Hajnal und Szemerédi gut brauchen.

28. Das ist ein Satz von Louis Bellmann.